前　言

《高等数学》作为高等院校各相关专业学生必修的一门重要的公共基础课，在高素质人才培养中具有特定的、不可替代的作用. 它不仅为其他后续的专业基础课、专业课提供有力的数学工具和数学基础，还对培养学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及应用数学知识分析和解决实际问题等方面都具有非常重要的作用.

随着科技水平的不断提高和高等教育的飞速发展，高等数学的教学内容、方式和手段也在不断地与时俱进.《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020)》以及“十三五”规划纲要(2016—2020)相继出台后，这一变化更加突出. 规划纲要指出，“到 2020 年，基本实现教育现代化，基本形成学习型社会，进入人力资源强国行列”，并且提出要全面实施“高等学校本科教学质量与改革工程”，我们正是在这一特定形势下编写了本书.

本书的编写既要体现“夯实基础、拓宽口径、提高素质”人才质量的培养要求，又要使内容、体系符合我国高等教育本科高等数学课程教学内容和课程体系改革的总体目标. 本书主要是为应用型本科院校相关专业编写的《高等数学》教材，强调以培养具有较强的实践能力和创新能力的应用型高级人才为宗旨.

本书《高等数学》分为上、下两册，共计十一章. 上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用等；下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程等. 本书在编写过程中，充分吸收国内外同类教材的优点，融入了作者多年来的教学心得与教学经验，注重知识的系统性、思想性与通用性，精炼理论证明过程，注意控制知识深度、广度，适当侧重基础运算和数学思想传授.

全书在编写时注意突出以下几个特点：

(1)书中例题和习题的编排主要针对基础知识和基本运算能力的训练，兼顾不同的知识点和不同的难度水平，注意减少需要特殊技巧才能解决的例题和习题. 每节后配备 A、B 两组习题，每章后又配备了复习题，以便于学生巩固所学的基本概念、基本理论，并在 B 组习题以及复习题中适当增加了难易适度的题目，以适应不同层次学生的学习需求.

(2)书中注意控制精确性引入概念的数量，各知识点、新概念的引入力求清晰简明，注意揭示概念的本质和概念之间的联系与区别. 对一些数学定义、定理适当给出几何解释或者其物理原型，以加强对概念的理解.

(3)书中对基本初等函数的导数、各种基本运算的法则都给出了适度的推导和证明. 对于极限的“ε—δ”形式证明等基本原理和方法作了适度的介绍，但不做过多、过深、过难的练习，目的是将更多精力放在“微分与积分”的这一核心内容上.

(4)书中对重要定理与公式的推证,层次分明,说理透彻.对某些重要定理只给出直观原理解释或进行部分证明.书中尽量控制定理的数量和难度,以实现本书的既定目标.

(5) 为了方便学习,书后有"常用初等数学公式""常用的曲线图形""二阶与三阶行列式""简单积分表"等附录.词作《莺啼序·读微积分发展史》及其注释,以简短文字记述在微积分学发展进程中的著名数学家的学术成就、道德品质、个人风范及巨大贡献.学一点数学史,有助于学生提高学习兴趣,激发学习的积极主动性,并激励后来者为继承与发展做出应有的贡献.

全书由北京数学会常务理事、高职高专教育工作委员会原主任金桂堂主编,由北京航空航天大学徐兵教授担任副主编.

索隐穷源深钻研,引经典据古今观,
超逸绝尘妙联想,慧心巧思构佳篇,
珠玑咳唾惊世语,酣畅淋漓言尽欢,
研精钩深博众采,坦荡寄语天地间.

书中疏漏和不足之处,敬请各位专家、学者不吝赐教,欢迎读者朋友指正.

编　者

目　　录

目　　录

第一章　函数、极限与连续

1.0　预备知识

高等数学主要在实数范围内研究函数，这一节先讲述学习高等数学必须具备的有关实数的基础知识.

1.0.1　实数与数轴

实数由有理数与无理数组成. 有理数包括正、负整数，零以及正、负分数. 有理数都可以用分数形式$\frac{p}{q}$（其中，p，q 为整数，$q\neq 0$）表示，也可用有限小数或无限循环小数表示. 无限不循环小数是无理数. 全体实数构成的集合称为实数集.

若在一条直线上（通常情况下取水平直线）确定一点为坐标原点，标以字母 O，指定一个方向为正方向（通常情况下取向右方为正方向），并规定一个单位长度，则称之为数轴（如图 1－1 所示）. 任一实数都对应数轴上唯一的一个点；反之，数轴上每一点都唯一地表示一个实数. 为了方便起见，我们经常把实数和它在数轴上对应的点不加区分，即把"实数 a"与"数轴上的点 a"的两种说法看作具有相同的含义.

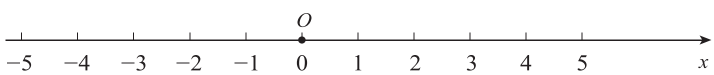


图 1－1

实数集记为 **R**，有理数集记为 **Q**，整数集记为 **Z**，正整数集记为 $\mathbf{N}^*$. 本书如无特殊声明，都是在实数集 **R** 上讨论问题. 实数可表示为：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\text{（无限不循环小数）}\end{cases}$$

1.0.2　实数的绝对值

实数 x 的绝对值记为$|x|$，其定义为

$$|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$$

例如，$|2|=2$，$|0|=0$，$|-2|=2$.

实数 x 的绝对值的几何意义：实数 x 的绝对值 $|x|$ 表示点 x 到坐标原点的距离.

实数的绝对值有如下性质：

(1)对于任意实数 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，有 $|x|=0$；

(2)对于任意实数 $x\in\mathbf{R}$，有 $|-x|=|x|$；

(3)对于任意实数 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|=\sqrt{x^2}$；

(4)对于任意实数 $x\in\mathbf{R}$，有 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(5)设 $a>0$，则 $|x|<a$ 的充分必要条件是 $-a<x<a$；

(6)设 $a>0$，则 $|x|>a$ 的充分必要条件是 $x<-a$ 或 $x>a$.

性质(5)的几何意义：在数轴上，$|x|<a$ 表示所有与原点的距离小于 $a(a>0)$ 的点 x 构成的集合，而 $-a<x<a$ 表示所有位于点 $-a$ 与点 a 之间的点 x 构成的集合，这两个集合表示的是同一个集合. 性质(6)可做类似的解释.

由性质(5)可以知道不等式 $|x-A|<a$ 与不等式 $A-a<x<A+a$ 是等价的，其中，A 为常数，a 为正实数.

关于实数四则运算的绝对值，有如下结论. 对任意实数 $x,y\in\mathbf{R}$，恒有

(1) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$；

(2) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|\geqslant|x|-|y|$；

(3) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$；

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

1.0.3 区间与邻域

1. 区间可理解为实数集 $\mathbf{R}$ 的子集.

设有实数 a 和 b，取 $a<b$.

(1)数集 $\{x|a<x<b\}$，称为开区间，记作 (a,b)；

(2)数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，称为闭区间，记作 $[a,b]$；

(3)数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$，称为左闭右开区间，记作 $[a,b)$；

(4)数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$，称为左开右闭区间，记作 $(a,b]$；

(5)数集 $\{x|a\leqslant x\}$，记作区间 $[a,+\infty)$；

(6)数集 $\{x|a<x\}$，记作区间 $(a,+\infty)$；

(7)数集 $\{x|x\leqslant b\}$，记作区间 $(-\infty,b]$；

(8)数集 $\{x|x<b\}$，记作区间 $(-\infty,b)$；

(9)全体实数的集合 $\mathbf{R}$，也可记作无限区间 $(-\infty,+\infty)$.

其中，a,b 分别为区间的左端点与右端点，闭区间 $[a,b]$，半开区间 $[a,b)$、$(a,b]$，开区间 (a,b) 为有限区间，以上各有限区间的长度为 $b-a$. 而(5)、(6)、(7)、(8)、(9)均为无限区间.

区间在数轴上的表示如图 1 - 2 所示.

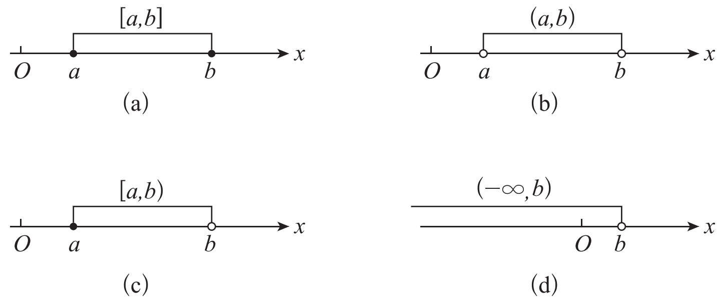


图 1 - 2

2. 邻域

设 δ 为一正数,开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0,\delta)$. 其中,x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径,邻域的长度为 2δ(图 1 - 3).

点 x_0 的 δ 邻域的不等式表示为

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta \text{ 或 } |x-x_0|<\delta.$$

若把邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中的中心点 x_0 去掉,由余下的点构成的集合,称为点 x_0 的空心 δ 邻域(图 1 - 4),记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$. 显然有

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

点 x_0 的 δ 空心邻域的不等式表示为

$$0<|x-x_0|<\delta.$$

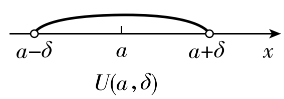


图 1 - 3

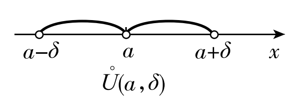


图 1 - 4

习题 1.0

1. 解下列不等式,用区间表示下列不等式的解的集合,并将解画在数轴上.

(1)$|x|\geqslant 2$;　　(2)$|x-2|<3$;

(3)$x^2-2x-8>0$;　　(4)$x^2+2x-3<0$;

(5)$|3x+1|<2$;　　(6)$|ax-x_0|<\delta$(其中,x_0 为常数,a,δ 为正数);

(7)$1<|x-2|<3$;　　(8)$0<(x-2)^2<4$.

2. 用不等式表示下列区间.

(1)$U(x_0,\delta)$;　　(2)$\mathring{U}(x_0,\delta)$;

(3)$U(3,\delta)$;　　(4)$\mathring{U}(1,\delta)$.

1.1 函数

1.1.1 常量与变量

在研究自然科学或工程技术的某一过程中,经常会遇到各种不同的量,例如时间、速度、温度、质量、面积、体积以及成本、收益、利润等. 这些量一般可分为两类,其中一类量在研究过程中保持不变,即取同一个数值,称之为**常量**;另一类量在研究过程中是变化着的,即可取不同的数值,称之为**变量**. 由于物质的运动是绝对的,静止是相对的,所以常量也是相对的. 在实际问题中,有一些量虽然也取不同数值,但若变化十分细微,为了研究问题的方便起见,有时也将这些量视为常量.

例 1 在自由落体运动中,物体垂直下落的距离与时间的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中,s 为距离,t 为时间,g 为重力加速度. 在自由落体运动中,时间 t、距离 s 是变量,重力加速度 g 是常量. 但严格讲,重力加速度也应是变量,因为地球是椭球体,每一点的重力加速度与这一点的位置到地心的距离有关,然而物体垂直下落的距离不是很大,重力加速度的变化也就微乎其微,因而重力加速度也就近似地视为常量了.

本书中,常量用字母 $a,b,c,\cdots\cdots$表示,变量用字母 $x,y,t,\cdots\cdots$表示.

1.1.2 函数的有关概念

在自由落体运动中,物体下落的距离 s 随下落的时间 t 的变化而变化,假定物体落地时刻 $t=T$,那么当时间 t 在闭区间$[0,T]$任取一值时,由上述关系式就可以确定相应的 s 值. 在实际中,如同自由落体运动,在某一过程中,两个变量同时变化,但是它们的变化不是孤立的,而是按照一定的规则互相联系着,其中一个量的变化会引起另一个量的变化,当前者的值确定时,后者则按照某一规则有一确定的值与之对应,这样两个变量之间就构成函数关系.

1. 函数的定义

定义 设 x 和 y 是两个变量,D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集,对于任意的 $x\in D$,变量 y 按照一定的规则 f,有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**,式子 $y=f(x)$称为**函数解析式或函数表达式**.

当自变量 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$. 所有的函数值的集合称为函数的**值域**,记作 $f(D)$,即 $f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

由函数的定义可知,函数的**定义域**与**对应规则**是确定函数的两要素. 值域是随定义域与对应规则而确定. 两个函数当且仅当定义域相同、对应规则相同时,这两个函数才是相同的.

在实际问题中,函数的定义域应根据问题的实际意义确定. 对于用公式表达的函数,

函数的定义域就是使得函数解析式有意义的自变量的取值集合.

例 2　下列各组中的两个函数是否为同一函数?

(1)$y=x-1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$;

(2)$y=|\cos x|$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

解　(1)函数 $y=x-1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. 因此,虽然这两个函数在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$上的函数值是相同的,但由于它们的定义域不相同,所以不是相同函数.

(2)函数 $y=|\cos x|$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 的定义域均为$(-\infty,+\infty)$,注意到恒有$\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$成立,即这两个函数的定义域相同且对应规则也相同,所以是相同函数.

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(2x-1)}$的定义域.

解　要使函数有意义,必须满足

$$\begin{cases}2x-1>0,\\ \ln(2x-1)\neq 0,\end{cases}\text{解得 } x>\frac{1}{2}\text{ 且 } x\neq 1,$$

所以函数的定义域为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

例 4　设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$,$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$,并确定它们的定义域.

解　$f[f(x)]=f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$,$D=\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$;

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(\frac{1-x}{x}\right)=\frac{\dfrac{1-x}{x}}{1-\dfrac{1-x}{x}}=x-1,D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

2. 函数的表示法

函数通常有三种表示法:表格法、图示法和公式法.

(1)表格法

若变量 x 与 y 之间有函数关系,将一系列自变量 x 的数值与对应的函数值 y 列成表格表示函数关系,例如,大家所熟悉的平方表、立方表、常用对数尾数表、三角函数表等,用列表表示函数的方法称为**表格法**.

表格法简单易行,也具有一定的直观性,且可以表达不易求解析式的函数,所以在自然科学与工程技术中经常使用,但其反映的往往是函数某一局部的情况.

(2)图示法

若变量 x 与 y 之间有函数关系,用图形的形式表示出来,这种表示函数的方法称为**图示法**.

例 5　华北某地气象站用自动温度记录仪记录 1 天 24 h 的温度变化情况(图 1-5). 图中的横坐标是时间 t(h),纵坐标是温度 T(C°),曲线反映了一昼夜中温度随时间变化的情况.

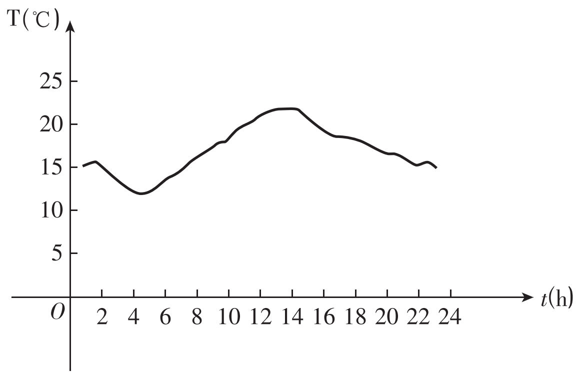


图 1-5

图示法直观性强,函数的变化一目了然,且便于研究函数的几何性质,但数量关系的精确度较差,不便于做理论研究.

(3)公式法

用数学式表示函数的方法称为**公式法**,又称**解析法**. 如例 1.

解析法能全面体现函数的全部特征,但并不是所有的函数都能用解析法表示,如类似气温随时间变化的函数是没有解析式的.

表格法、图示法和解析法在表示函数关系时,各有优点及不足之处,所以常常将三种方法同时使用,以便更好地探究函数的性质.

1.1.3　函数的简单性质

1. 函数的有界性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,若存在正数 M,使得在区间 I 上 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称 $f(x)$ 在 I 上**有界**;若不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 函数 $f(x)=\sin x$ 的图形位于直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间(图 1-6).

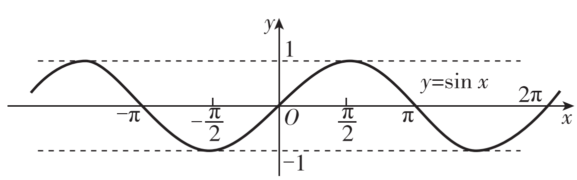


图 1-6

应注意，讨论函数的有界性离不开自变量的取值区间 I. 例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内，因为 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界，但函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的（x 趋近于 0 时，不存在确定的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立）. 如果不限定区间，则约定是在该函数的定义域上有此性质.

2. 函数的单调性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**（图 1-7），区间 I 称为**单调增区间**；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调减少**（图 1-8），区间 I 称为**单调减区间**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

如图 1-7 和图 1-8 所示，单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的；单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的.

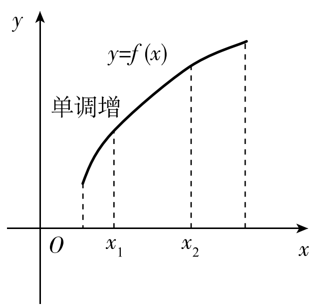


图 1-7

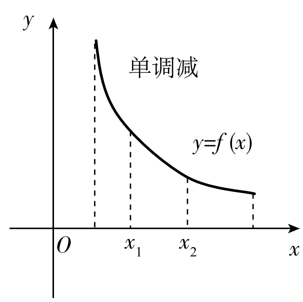


图 1-8

例如，$f(x)=\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加函数.

又如，$f(x)=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.

应注意，讨论函数的单调性也离不开自变量的取值区间 I. 函数的单调性是针对具体区间而言，是函数的局部特性. 如果不限定区间，也约定是在该函数的定义域上有此性质.

3. 函数的奇偶性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称，若对任意 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；

若对任意 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则 $f(x)$ 称为**奇函数**.

由定义可知，偶函数的图形关于 y 轴对称（图 1-9），奇函数的图形关于原点对称（图 1-10）.

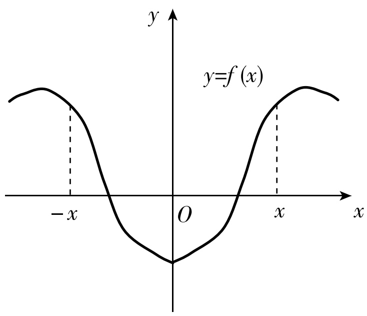


图 1-9

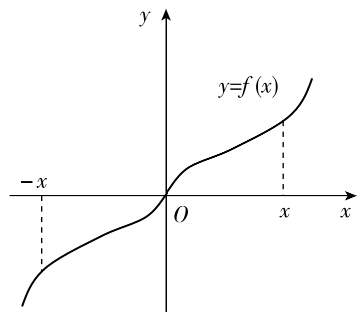


图 1-10

例如，$y=x^2$、$y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是偶函数，$y=x^3$、$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是奇函数.

4. 函数的周期性

定义 设函数 $f(x)$的定义域为 D，若存在常数 $T\neq 0$，使得对任意 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，并且

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则 $f(x)$称为**周期函数**，T 为**周期**，通常讲的周期是指**最小正周期**.

例如，函数 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；而函数 $y=\tan x$ 及 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

显然，周期为 T 的周期函数 $y=f(x)$的图形沿 x 轴相隔一个周期 T 重复一次.

1.1.4 反函数与复合函数

1. 反函数

定义 设函数 $f(x)$的定义域为 D，值域为 $Y=f(D)$. 如果对于值域中每一个 y，都可由方程 $f(x)=y$ 唯一确定出 x，则得到一个定义在集合 Y 上的新函数，称它为 $y=f(x)$的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),y\in Y,$$

对反函数 $x=f^{-1}(y)$来说，原来的函数 $y=f(x)$称为**直接函数**.

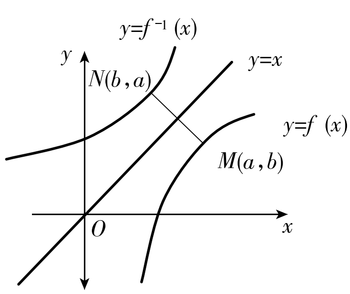


图 1-11

通常，用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常将 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Y=f(D)$. 显然，反函数的定义域等于直接函数的值域，反函数的值域等于直接函数的定义域，且 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数.

函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称(如图 1-11).

由反函数定义可得求反函数的步骤如下：

(1)从 $y=f(x)$中解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2)交换字母 x 与 y 的位置，并注意到反函数的定义域为直接函数的值域.

例 6　求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-1, x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $y=\mathrm{e}^x-1, x\in(-\infty+\infty)$.

解　(1)先从 $y=2x-1$ 解出 x，得

$$x=\frac{1}{2}(y+1),$$

交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x+1), x\in(-\infty,+\infty).$$

(2)从 $y=\mathrm{e}^x-1$ 解出 x，得

$$x=\ln(y+1),$$

交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为

$$y=\ln(x+1), x\in(-1,+\infty).$$

2. 复合函数

定义　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中，x 是自变量，u 称为**中间变量**.

例 7　设 $y=u^2, u=2x+1$，则 $y=(2x+1)^2$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=2x+1$ 复合而成的复合函数.

例 8　设 $y=\ln u, u=-1-x^2$，因 $u=-1-x^2$ 的值域与 $y=\ln u$ 的定义域无公共部分，故 $y=\ln u$ 与 $u=-1-x^2$ 不能构成复合函数.

注意　复合函数也可由 3 个或 3 个以上的函数复合而成.

例 9　$y=\sin[2-\ln(3x+1)]$ 是由 $y=\sin u, u=2-\ln v, v=3x+1$ 复合而成的复合函数.

1.1.5　分段函数

用公式法表示函数，一般情况下，用一个式子即可，但是也有一些函数，需要在定义域内不同区间上用不同式子表示，即用两个或两个以上的式子来表示，这类函数称为**分段函数**.

例 10　已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x>0,\\ 2x, -2<x\leqslant 0,\\ -x-1, x\leqslant -2,\end{cases}$$

求 $f(1)$、$f(0)$、$f(-1)$、$f(-2)$ 和 $f(-3)$.

解　函数的图像如图 1－12 所示.

当 $x>0$ 时，$f(1)=1^2=1$；

当 $-2<x\leqslant 0$ 时，$f(0)=2\times 0=0$，$f(-1)=2\times(-1)=-2$；

当 $x\leqslant-2$ 时，$f(-2)=-(-2)-1=1$，$f(-3)=-(-3)-1=2$.

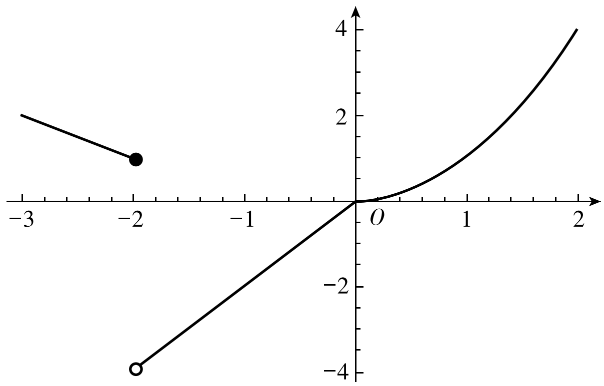


图 1 - 12

例 11 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$$

其图形如图 1-13 所示.

例 12 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0.\end{cases}$$

其图形如图 1-14 所示.

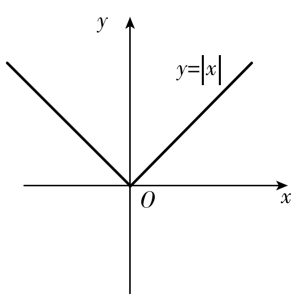


图 1 - 13

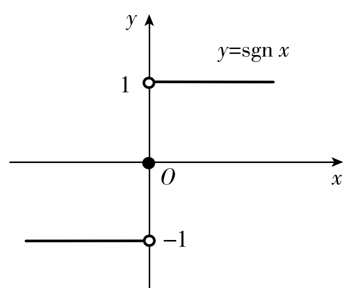


图 1 - 14

例 13 取整函数

$$y=[x], x\in(-\infty,+\infty).$$

其中，设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**，记作 $[x]$.

例如，$\left[\frac{1}{3}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$\left[-\frac{1}{2}\right]=-1$.

取整函数的图形如图 1 - 15 所示.

注意 (1)分段函数是用几个式子表示一个函数，而不是几个函数；

(2)分段函数需要分段求值、分段作图.

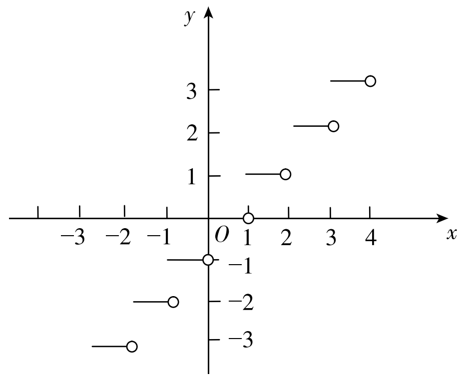


图 1－15

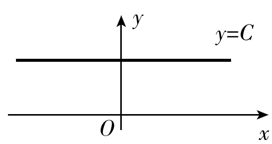
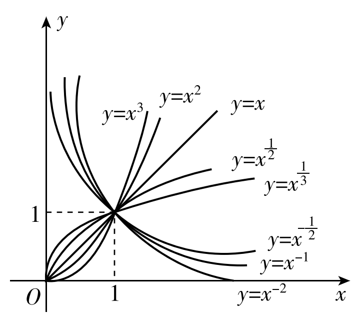
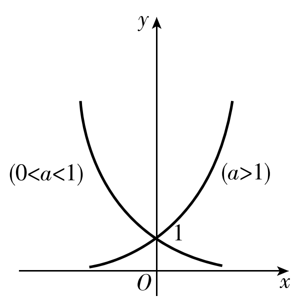
1.1.6　初等函数

1. 基本初等函数

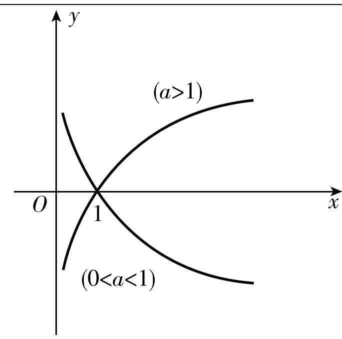
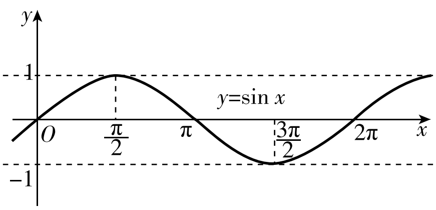
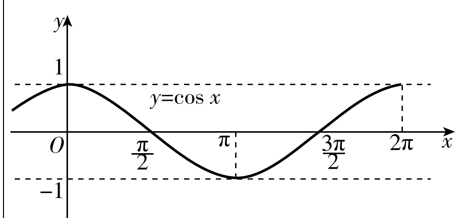
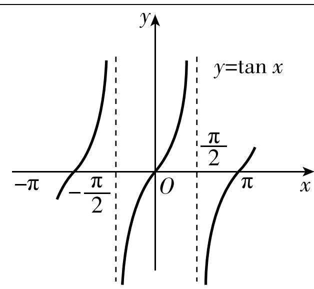
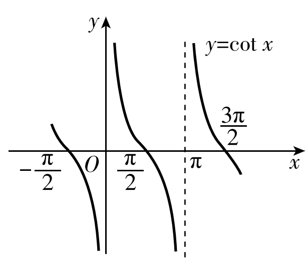
我们学过的常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称为**基本初等函数**.

基本初等函数的定义域、值域、图像和主要特性见表 1－1.

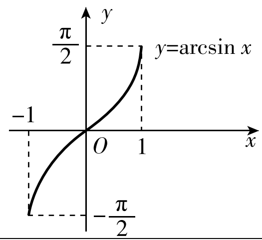
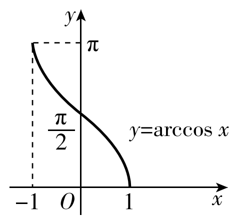
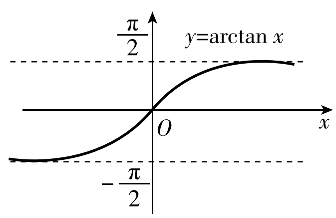
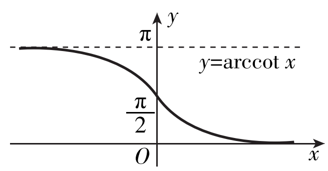
表 1－1

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特性
常量函数	$y=C$（C 为常数）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		偶函数，周期函数，任意不为 0 的正常数均为周期，有界函数
幂函数	$y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）	依 α 不同而异，但在$(0,+\infty)$内都有定义		在第一象限内，当 $\alpha>0$ 时，x^{α} 为单调增；当 $\alpha<0$ 时，x^{α} 为单调减
指数函数	$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过点$(0,1)$. 当 $0<a<1$ 时，a^{x} 是单调减；当 $a>1$ 时，a^{x} 是单调增

续表

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特性
对数函数	$y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过点$(1,0)$. 当 $0<a<1$ 时,$\log_a x$ 是单调减; 当 $a>1$ 时,$\log_a x$ 是单调增
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		奇函数,周期 2π,有界函数,在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$单调增;在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$单调减$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		偶函数,周期 2π,有界函数,在$[2k\pi-\pi,2k\pi]$单调增;在$[2k\pi,2k\pi+\pi]$单调减$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期 π,在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$单调增$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期 π,在$(k\pi,k\pi+\pi)$单调减$(k\in\mathbf{Z})$

续表

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特性
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数,单调增,有界函数
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减,有界函数
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增,有界函数
	$y=\text{arccot}\, x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减,有界函数

2. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或经过有限次复合步骤所构成,且可用一个解析式表示的函数,称为**初等函数**.

例如,$y=\lg\cos^2 x$,$y=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+1}$,$y=|x|=\sqrt{x^2}$都是初等函数.

注意　分段函数一般不是初等函数.

3. 建立函数关系举例

例 14　有一无盖的圆柱形大桶,容积为 V,试将其表面积表示为其底面半径 r 的函数.

解　无盖的圆柱形大桶底面面积为

$$S_1=\pi r^2.$$

于是桶高为

$$h=\frac{V}{S_1}=\frac{V}{\pi r^2}.$$

桶的侧面积为

$$S_2=2\pi rh=\frac{2V}{r}.$$

因此桶的表面积为

$$S=S_1+S_2=\pi r^2+\frac{2V}{r}(r>0).$$

例 15 某矿厂 A 要将生产出的矿石运往铁路旁的冶炼厂 C 冶炼. 已知该矿厂距冶炼厂所在铁路垂直距离为 a 千米,它的垂足 B 到 C 的距离为 b 千米. 又知铁路运价为 m 元/吨·千米,公路运价是 n 元/吨·千米($m<n$),为节省运费,拟在铁路上另修一小站 M 作为转运站,那么总运费的多少决定于 M 的位置. 试求出总运费与距离 $|BM|$ 的函数关系.(图 1-16)

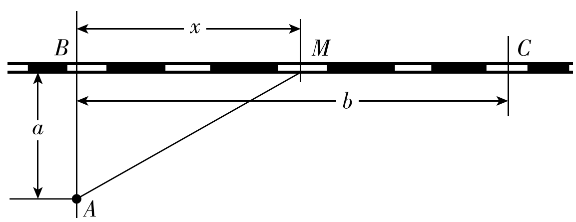


图 1-16

解 设总运费记为 y,距离 $|BM|$ 记为 x. 由于

总运费 y=铁路运费+公路运费

由图 1-16 可以看出总运费与距离 $|BM|$ 的函数关系为

$$y=n|AM|+m|MC|=n\sqrt{x^2+a^2}+m(b-x),$$

函数的定义域为 $[0,b]$.

例 16 某产品共有 1 500 吨,每吨定价为 150 元,若一次销售量不超过 100 吨时,按原价销售;若一次销售量超过 100 吨,但不超过 500 吨,则超过 100 吨的部分按 9 折出售;如果一次销售量超过 500 吨,则超过 500 吨的部分又按 8 折出售,试将该产品一次出售收入表示成一次销售量的函数.

解 用 x 表示一次销售量,$f(x)$ 表示一次销售收入,则

$$f(x)=\begin{cases}150x, 0<x\leqslant 100,\\ 150[100+0.9(x-100)], 100<x\leqslant 500,\\ 150[100+0.9\times 400+0.8(x-500)], 500<x\leqslant 1\,500,\end{cases}$$

函数的定义域为 $[0,1\,500]$.

习题 1.1

A 组

1. 下列各组函数中,$f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(2) $f(x)=x-2$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $g(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$；

(4) $f(x)=\ln x^3$ 与 $g(x)=3\ln x$；

(5) $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(6) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ 与 $g(x)=|x-1|$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2x-3}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}$；　　(4) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$；

(5) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$；　　(6) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$.

3. 求函数值.

(1) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(\dfrac{1}{a})$，$f(x+h)$；

(2) 设 $f(x+3)=x^2+6x+5$，求 $f(x)$，$f(x+\Delta x)$，$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, 0\leqslant x<1,\\ 3-x, 1\leqslant x<2,\\ x^2-1, x\geqslant 2.\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$的定义域；

(2) 求 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$；

(3) 画出 $f(x)$的图形.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x+\sin x$；　　(2) $y=x^3+\cos x$；

(3) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　　(4) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(5) $y=\ln(1+x^2)$；　　(6) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

6. 说明下列函数的单调性.

(1) $y=2x-1$；　　(2) $y=1-x^2$；

(3) $y=e^{-x}$；　　(4) $y=\ln(x-1)$.

7. 下列函数中哪些是周期函数？如果是周期函数，请说明其周期.

(1) $y=\sin 2x$；　　(2) $y=\sin x+\cos x$；

(3) $y=\tan(3x+1)$；　　(4) $y=\sin^2 x$；

(5) $y=x\cos x$；　　(6) $y=\sin x+\tan\dfrac{2x}{5}$.

8. 求下列函数的反函数.

(1) $y=x^3+2$；　　(2) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

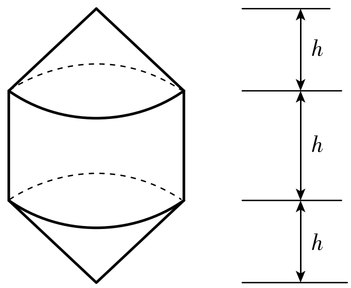
9. 下列复合函数是由哪些简单函数复合构成的？

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$；　　(2) $y=\cos(x^2+1)$；

(3) $y=\sin(1+\ln^2 x)$；　　(4) $y=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{x}}$.

10. 设一矩形的周长为 $2p$，现绕其一边旋转一周形成一圆柱体，求圆柱体体积 V 与底半径 x 的函数关系.

11. 要制作一个浮标筒，该浮标筒由一个圆柱面与两个相同的圆锥面焊接而成，如图所示，其中，两个圆锥和一个圆柱的高都相等，在使用材料确定的条件下，如何用浮标筒中间部位圆柱的半径表示出它的浮力？



（第 11 题图）

B 组

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$；　　(2) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$；　　(4) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

2. 解下列各题.

(1) 设 $f(x)=3x+5$，求 $f[f(x)-2]$；

(2) 设 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$，求 $f[g(x)]$；

(3) 设 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{1-x}{3+x}$，求 $f(x)$；

(4) 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$f[g(x)]=x+1$，求 $g(x)$；

3. 解下列各题.

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{\sin x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 当 $x\in(-\infty,+\infty)$，求 $f[f(x)]$.

(3) 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$，其中，$x\neq 0$，$x\neq 1$. 求 $f(x)$.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$ 及 $f\{f[\cdots f(x)]\}$.

4. 证明 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$；　　(2) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$.

6. 下列复合函数是由哪些简单函数复合构成的？

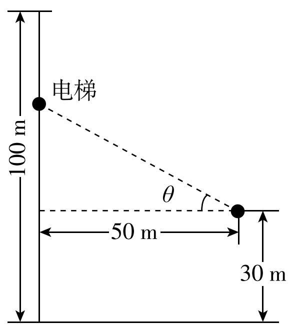
(1) $y=2^{\arcsin(1+\sqrt{x+1})}$；　　(2) $y=\cos^2\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$；

(3) $y=\ln(1+\sqrt{\tan x^2})$；　　(4) $y=\arccos\sqrt{x^2-1}$.

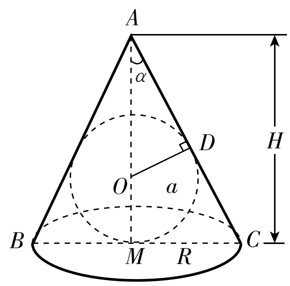
7. 某商厦高 100 m，你现位于商厦对面，离商厦 50 m，高 30 m 的楼房的窗户处. 商厦的观光电梯正以 10 m/s 的速度下降，开始（设此时电梯在楼顶）时记 $t=0$（单位：s）. 设 θ 为你的水平视线与看到电梯的视线之间的夹角，如图所示.

(1) 求电梯从楼顶下降过程中距离地面的高度 $h(t)$ 的公式；

(2) 利用(1)的答案，求 θ 依时间 t 变化的函数表达式.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 一正圆锥外切于半径为 a 的球，如图所示，试将圆锥的体积表示为圆锥半顶角 α 的函数.

9. 某停车场收费标准为：凡停车不超过 2 小时的，收费 5 元；以后每多停车 1 小时（不到 1 小时仍以 1 小时计）增加收费 1 元，但停车时间最长不能超过 5 小时. 试建立停车费用与停车时间之间的函数模型.

1.2　极限

1.2.1　数列的极限

1. 数列的概念

定义　按一定规则排列的无穷多个实数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称为**数列**，简记作 $\{x_n\}$，其中的每一个数称为数列的项，x_1 称为数列的第一项，x_2 称为数列的第二项，……，x_n 称为数列的第 n 项，又称为通项或一般项.

数列可以理解为是定义在正整数集合 $\mathbf{N}^*$ 上的函数，可记作

$$x_n=f(n), n\in \mathbf{N}^*.$$

因此数列也称为整标函数.

例 1 数列$\{x_n\}=\{n^2\}$,即

$$1,4,9,\cdots,n^2,\cdots.$$

例 2 数列$\{x_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$,即

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots.$$

例 3 数列$\{x_n\}=\left\{\frac{(-1)^n+1}{2}\right\}$,即

$$0,1,0,1,\cdots,\frac{(-1)^n+1}{2},\cdots.$$

例 4 数列$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$,即

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots.$$

例 5 数列$\{x_n\}=\left\{1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$,即

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots.$$

在几何上,数列$\{x_n\}$可看作数轴上的一个动点依次取数轴上的 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$(图 1-17).

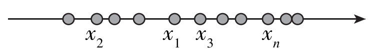


图 1-17

2.数列的极限

观察上述几个数列,当 n 无限增大时(即 $n\to\infty$时),是否有些数列无限趋近于某个确定的常数?如例 2 中,当 n 无限增大时,数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$无限趋近于常数 1;例 4 中,当 n 无限增大时,数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$无限趋近于常数 0;例 5 中,当 n 无限增大时,数列$\left\{1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$无限趋近于常数 1.

如何说明"当项数 n 无限增大时,数列$\{x_n\}$无限趋近于某个确定的常数"呢?光凭直观感觉是远远不够的,为此,我们给出严格的、精确的分析:

下面以数列$\left\{1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$为例,说明当项数 n 无限增大时,数列的项 $x_n=1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$无限趋近于常数 1.

所谓 x_n 无限趋近于常数 1,就是说$|x_n-1|$可以无限小,即对于任意给定的正数 ε,$|x_n-1|$都可以小于 ε.而$|x_n-1|$可以无限小的前提条件是 n 充分大.比如,给定 $\varepsilon=0.01$,欲使

$$|x_n-1|=\left|\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon=0.01,$$

只需 $n>100$ 即可. 若给定 $\varepsilon=0.001$,欲使

$$|x_n-1|=\left|\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon=0.001,$$

只需 $n>1\,000$ 即可.

一般来说,对于任意给定的正数 ε,欲使

$$|x_n-1|=\left|\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 这样,从量化方面非常形象地刻画了当 $n\to\infty$ 时,数列 $\{x_n\}$ 无限趋近于常数 1.

当项数 n 无限增大时,数列 $\{x_n\}$ 无限趋近于某个确定的常数 A,又称当 n 无限增大时(即 $n\to\infty$ 时),数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限. 当项数 n 无限增大时,数列 $\left\{1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$ 以 1 为极限.

下面给出数列极限的精确定义.

定义　设有数列 $\{x_n\}$,A 为常数,如果对于任意给定的正数 ε,总存在一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,都有

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

成立,常数 A 称为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的**极限**,记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty).$$

数列 $\{x_n\}$ 有极限,也称数列**收敛**,否则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

在上述定义中,正数 ε 可以"任意给定"是很重要的,因为只有这样,不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 才能表达出"x_n 与 A 无限接近". 还应注意到:定义中的正整数 N 是与任意给定的正数 ε 有关,它会随着 ε 的给定而确定,但不是唯一的.

如例 2 中,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$;例 4 中,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$;例 5 中,$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]=1$.

并不是任何数列都有极限. 如例 1 中,数列 $\{x_n\}=\{n^2\}$,当 $n\to\infty$ 时,x_n 不可能无限趋近于某个确定的常数,所以数列发散;例 3 中,数列 $\{x_n\}=\left\{\frac{(-1)^n+1}{2}\right\}$,当 $n\to\infty$ 时,x_n 不是趋向于一个确定的常数,所以数列发散.

例 6　利用定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(0<|q|<1)$.

证　(1)对于任意给定的正数 ε,欲使

$$\left|\frac{2n+1}{3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon,$$

由于

$$\left|\frac{2n+1}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3n},$$

只需

$$\frac{1}{3n}<\varepsilon\text{，即 } n>\frac{1}{3\varepsilon},$$

因此，可取 $N=\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]+1$. 则当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{2n+1}{3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$$

成立，所以，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\frac{2n+1}{3n}\right\}$ 以 $\frac{2}{3}$ 为极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}.$$

(2)对于任意给定的正数 ε(设 $\varepsilon<1$)，欲使

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$

由于

$$|q^n-0|=|q|^n,$$

只需

$$|q|^n<\varepsilon,$$

取自然对数，解得

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

因此，可取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1$. 则当 $n>N$ 时，恒有

$$|q^n-0|<\varepsilon$$

成立，所以，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{q^n\}$ 以 0 为极限，即

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0\ (0<|q|<1).$$

读者可自行证明 $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$($c$ 为常数)，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

1.2.2 收敛数列的性质

首先说明数列极限定义的几何意义.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，根据定义中的不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 可知，$A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon$. 由此可以看出，数列 $\{x_n\}$ 中从第 $n+1$ 项起之后的一切项

$$x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3},\cdots$$

所表示的点，都落在邻域 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内，在邻域外最多只有有限个点

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n.$$

因此，如果数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限，那么数列各项 x_n 所表示的点几乎全部密集在以点 A 为中心的任意小的邻域内. 由此可知，如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，那么数列各项 x_n 所表示的点必全部落在一个有限区间内，这个区间既包含点 A 的 ε 邻域，也包含有限个点 x_1，$x_2,x_3,\cdots,x_n$ 在内. 换言之，数列 $\{x_n\}$ 有界. 由此，可得下列结论：

定理 1(收敛数列的有界性)　收敛数列$\{x_n\}$必定有界.

由收敛数列的有界性可以推得:无界数列一定是发散的,也就是说,它的极限不存在.但应注意,有界的数列不一定是收敛.例如,数列

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}(\text{当 } n \text{ 为奇数时}),\\ 1(\text{当 } n \text{ 为偶数时})\end{cases}(n=1,2,3,\cdots)$$

显然有界,对数列的所有的项 x_n,恒有 $|x_n|\leqslant 1$.但是它的极限不存在,因为当项数 $n=2k-1\to\infty$时(k 取正整数),数列的奇数项 $x_n\to 0$,而当项数 $n=2k\to\infty$时(k 取正整数),数列的偶数项 $x_n\to 1$.可知此数列是发散的,且有以下结论:

定理 2(极限的唯一性)　若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限唯一.

证　(用反证法)　假设数列$\{x_n\}$收敛,但极限不唯一.不妨设 $x_n\to A$,$x_n\to B$,且$A>B$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,取 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}$,必存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,不等式

$$|x_n-A|<\frac{A-B}{2},$$

即

$$A-\frac{A-B}{2}<x_n<A+\frac{A-B}{2}.$$

从而有

$$x_n>\frac{A+B}{2}. \tag{1}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$,取 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}$,必存在正整数 N_2,当 $n>N_2$ 时,不等式

$$|x_n-B|<\frac{A-B}{2},$$

即

$$B-\frac{A-B}{2}<x_n<B+\frac{A-B}{2}.$$

从而有

$$x_n<\frac{A+B}{2}. \tag{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$(即取 N_1,N_2 中最大者),当 $n>N$ 时,(1)式和(2)式都成立.(1)式和(2)式显然是矛盾的,假设不成立.因此收敛数列的极限必唯一.

定理 3(收敛数列的保号性)　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在正整数 N,当 $n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,设 $A>0$,由数列极限的定义,对 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}$,存在正整数 $\mathbf{N}$,当 $n>\mathbf{N}$ 时,有

$$|x_n-A|<\frac{A}{2},$$

即

$$A-\frac{A}{2}<x_n<A+\frac{A}{2},$$

从而

$$x_n>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

推论 若数列$\{x_n\}$从某项起有 $x_n\geqslant 0$(或 $x_n\leqslant 0$),且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

1.2.3 数列极限的运算

下面讨论数列极限的运算法则.

定理 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$,则

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A\pm B$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A\cdot B$.

推论 $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n=c\lim\limits_{n\to\infty} x_n=cA$($c$ 为常数);

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^k=(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^k=A^k$($k$ 为正整数).

(3)若 $B\neq 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}=\dfrac{A}{B}$.

证 只证(1)中和的情况.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,所以对于任意给定的正数 ε,存在正整数 N_1,使得当$n>N_1$ 时,有

$$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2};$$

同时,存在正整数 N_2,使得当 $n>N_2$ 时,有

$$|x_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,上述两个不等式同时成立,因此有

$$\begin{aligned}|(x_n+y_n)-(A+B)|&=|(x_n-A)+(y_n-B)|\\&\leqslant|x_n-A|+|y_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

成立,即

$$|(x_n+y_n)-(A+B)|<\varepsilon.$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n=A+B.$$

相似地可以证明其他几个结论.

定理中的(1)、(2)可推广到有限个函数的情形. 例如,如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$,$\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 都存在,则有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n\pm z_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n\pm\lim_{n\to\infty}z_n,$$

且推论$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^k)=(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^k$ 中,当 k 为正有理数时也成立.

例 7　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

解　用拆项法，注意到

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\text{于是有}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1.\end{aligned}$$

例 8　求下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n^2}$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{1+n^2}$；　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解　(1)$\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\dfrac{n+3}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}=0+0=0.$

(2)$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{1+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}2}=\frac{3-0+0}{0+2}=\frac{3}{2}.$$

(3)应先用等差数列前 n 项求和公式，化简后再求极限：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

一般地，当 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_l}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},k=l,\\0,k<l.\end{cases}$$

1.2.4　数列极限存在的准则

下面给出数列极限存在的准则，这是判断一些数列极限存在的有效方法.

准则 1(夹逼准则)　设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足条件：

(1)$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，

则数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，对于任意给定的正数 ε，总存在一个正整数 N_1，使得当 $n>N_1$ 时，都有

$$|y_n-A|<\varepsilon,$$

即

$$A-\varepsilon<y_n<A+\varepsilon. \tag{1}$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$,对于任意给定的正数 ε,总存在一个正整数 N_2,使得当 $n>N_2$ 时,都有

$$|z_n-A|<\varepsilon,$$

即

$$A-\varepsilon<z_n<A+\varepsilon. \tag{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,使得(1)、(2)式同时成立,综合(1)、(2)式,有

$$A-\varepsilon<y_n\leqslant x_n\leqslant z_n<A+\varepsilon,$$

即

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

所以数列$\{x_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

例 9 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

根据准则 1,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

对于数列$\{x_n\}$,若有

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是**单调增加**的;若有

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是**单调减少**的. 单调增加或单调减少的数列统称为**单调数列**. 例如,数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$单调增加,数列$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$单调减少.

定义 对于数列$\{x_n\}$,若存在正数 M,使得对于一切 n 都有

$$|x_n|\leqslant M,$$

则称数列$\{x_n\}$是**有界**的,M 是该数列的一个上界. 如果上述的正数 M 不存在,即无论正数 M 多么大,都有这样的正整数 m 存在,使得

$$|x_m|>M,$$

则称数列$\{x_n\}$**无界**.

准则 2(单调有界准则) 单调有界必有极限.

严格地说，单调增数列上有界或单调减数列下有界必有极限. 定理的证明较复杂，故从略. 但从几何直观来看(图 1－18)，这个定理的正确性是不言而喻的. 由于数列是单调的，因此它的各项所对应的点随着项数 n 的增大在数轴上朝着一个方向移动. 这种移动只有两种可能，一种可能是无限远移，因为数列是有界的，所以这种可能性不存在；另外一种可能，即无限接近一个定点 A 而又不能越过 A，换言之，A 就是数列的极限.

(a) 单调增上有界　　(b) 单调减下有界

图 1－18

例 10　设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，证明数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛.

证　首先，证明数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增加的. 按二项式展开公式，有

$$\begin{aligned}x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\\&\quad\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\&=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\\&\quad\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

类似地，有

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\\&\quad\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).\end{aligned}$$

比较 x_n 与 x_{n+1} 中相同位置的项，可见第一项、第二项相同，从第三项起到第 $n+1$ 项，x_{n+1} 的每一项都大于 x_n 的对应项，并且在 x_{n+1} 中还多了一个正项，所以有

$$x_n<x_{n+1},$$

即数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增加的.

其次，证明数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 有界. 因为 $1-\frac{1}{n},1-\frac{2}{n},\cdots,1-\frac{n-1}{n}$ 各因子都小于 1，故

$$\begin{aligned}x_n&<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\\&=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.\end{aligned}$$

根据单调有界准则，数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$收敛，将其极限记作 e，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

可以证明 e 是无理数，

$$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots.$$

习题 1.2

A 组

1. 观察下列数列的变化趋势，若有极限，请指出极限值.

(1) $x_n=\frac{n+2}{n+1}$；　　(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n^2}$；

(3) $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}$；　　(4) $x_n=1+\frac{1}{10^n}$.

2. 根据数列极限的定义证明下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\frac{1}{n}\right]=1$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=1$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n^2}{n}=0$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+5n-2}$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{1-n^2}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3+1}}{\sqrt{n}-n}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}\right]$.

B 组

1. 观察下列数列的变化趋势，若有极限，请指出极限值.

(1) $x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$；　　(2) $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$.

2. 根据数列极限的定义证明下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+3n}=\frac{1}{2}$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n+1}$；

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a<c<d<b$. 证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$. 其中，p，q 为任意常数.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$. 证明在 $[0,2a]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

复习题一

一、单项选择题.

1. 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，$g(x)=x-1$，则 $f[g(x)]$ 的定义域为（　　）.

A. $[-1,1]$　B. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　C. $[0,2]$　D. $(-\infty,+\infty)$

2. 设 $f\left(\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{x}{x-2}$，则 $f(2x)=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{2x-1}$　B. $\dfrac{1}{1-2x}$　C. $\dfrac{x}{x-1}$　D. $\dfrac{2x}{2x-1}$

3. 函数 $y=e^x-1$ 在其定义域内是（　　）.

A. 单调增函数　B. 单调减函数　C. 非单调函数　D. 有界函数

4. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，则一定存在 x_0 的一个去心邻域，在此邻域内有（　　）.

A. $f(x)<0$　B. $f(x)>0$　C. $f(x)\leqslant 0$　D. $f(x)\geqslant 0$

5. 下列极限存在的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}$　C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}$　D. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x}{\sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=$（　　）.

A. $e^{\frac{3}{2}}$　B. $e^{-\frac{3}{2}}$　C. e^6　D. e^{-6}

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{2}$　B. 2　C. 0　D. ∞

8. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中为无穷小量的是（　　）.

A. $\ln(1+x)$　B. $\cos(1-x)$　C. $\dfrac{\sin x}{x}$　D. e^{1-x}

9. $x=0$ 是函数 $y=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的（　　）.

A. 可去间断点　B. 跳跃间断点　C. 无穷间断点　D. 振荡间断点

10. 下列函数中，在 $x=0$ 处不连续的是（　　）.

A. $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x^3},x\neq 0,\\ 0,x=0;\end{cases}$　B. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|},x\neq 0,\\ 1,x=0;\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x},x\neq 0,\\ 1,x=0;\end{cases}$　D. $f(x)=\begin{cases}2x-1,x\leqslant 0,\\ x^2-x-1,x>0.\end{cases}$

二、填空题.

1. 若 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，那么 $f(x^2)$ 的定义域为________；

2. 函数 $y=\tan x-\cot x$ 的周期是________；

3. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{2x}=2$，则 $k=$________；

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=\sqrt{e}$，则 $k=$________；

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0,\\ 1+x^2, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=$________；

6. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x^2-1}=$________；

7. $\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}=$________；

8. 设 $x\to 0$ 时，$1-\cos 2x$ 与 $ax\sin x$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________；

9. 设 $f(x)=\begin{cases}(1-x)\sin\dfrac{1}{1-x}, & x<1,\\ 1-\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$________；

10. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x+a, & x\leqslant 0,\\ \sin x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$________.

三、计算与证明

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x+2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{x^2}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\tan^2 x}{x\sin x}$；　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}$.

2. 设 $f(x-2)=x^2+2x-1$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 的连续性(间断点及连续区间).

4. 证明方程 $x^5-5x-1=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

5. 已知 a,b 为常数，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=1$，求 a,b 的值.